Задача A. Сім'я

Автор задачі: **Меліса Галіба**
Задачу підготував: **Данило Квіт**
Розбір написав: **Костянтин Денисов**

Кількість братів Ксенії і є кількістю братів в сім'ї, при цьому кількість братів Федора на один менше за цю кількість. Тобто братів у сім'ї є $\max(b_1, b_2)$. Аналогічні міркування можна застосувати щодо кількості сестер.

Тому загалом є $\max(b_1, b_2)$ братів і $\max(s_1, s_2)$ сестер.

Задача B. A+B=C

Автор задачі: **Костянтин Денисов**
Задачу підготував: **Данило Квіт**
Розбір написав: **Данило Квіт**

Неважко зрозуміти, що вираз $a_1 + b_1 = c$ можна перетворити у вираз $a_2 + b_2 = c$ тільки якщо сума кількості сірників, що використовуються у a_1 та b_1, дорівнює кількості сірників, що використовуються у a_2 та b_2. Тому достатньо перебрати всі можливі комбінації a_2 та b_2 (яких є $10 \cdot 10$) та перевірити, чи хоча б якась з них одночасно задовольняє 2 умови:

1. вираз $a_2 + b_2 = c$ є правильним;

2. сума кількості сірників, що використовуються у a_1 та b_1, дорівнює кількості сірників, що використовуються у a_2 та b_2.

Кількості сірників, що використовуються для кожного числа при цьому можна зберегти у пам'яті як масив.

Задача C. Площа торта

Автор задачі: **Микола Арзубов**
Задачу підготував: **Данило Квіт**
Розбір написав: **Костянтин Денисов**

Нехай a та b — це сторони прямокутника, які ми шукаємо. Очевидно, що виконується рівність $a \cdot b = P + Q$. Це означає, що a і b є дільниками числа $x := P + Q$. Усі дільники числа x можна знайти за $O(\sqrt{x})$ операцій.

Розглянемо кожен дільник d числа x. Для нього перевіряємо, чи підходить прямокутник зі сторонами d та $\frac{x}{d}$. Тобто, якщо двоє людей почнуть відрізати від такого прямокутника найбільші можливі квадрати, ми можемо обчислити площі цих квадратів і порівняти їх із P та Q.

Щоб обчислювати площі швидко, зауважимо, що прямолінійне віднімання меншої сторони c від більшої d може бути дуже повільним. Наприклад, якщо $c = 1$ і $d = 10^12$, знадобиться 10^12 операцій.

Однак можна скористатися ефективнішим підходом. Помітимо, що менша сторона c змінюється лише тоді, коли більша сторона d зменшується до $d \mod c$. За один такий перехід виконується $\lfloor \frac{d}{c} \rfloor$ операцій. Цей підхід аналогічний алгоритму Евкліда для знаходження найбільшого спільного дільника (НСД) двох чисел, який працює за $O(\log \min(a, b))$.

Таким чином, загальна складність алгоритму становить $O(\sqrt{P+Q} \cdot \log{(P+Q)})$. На практиці алгоритм працює ще швидше, оскільки кількість дільників числа значно менша за $\sqrt{P+Q}$.

Задача D. Цифрова гра

Автор задачі: **Костянтин Денисов**
Задачу підготував: **Данило Квіт**
Розбір написав: **Костянтин Денисов**

Твердження. Позначимо $\mathrm{cnt}(l, r)$ — кількість різних цифр на відрізку $[l, r]$ рядка s. Якщо існує відрізок $[l, r]$ для якого виконується нерівність $\mathrm{cnt}(l, r) \cdot 2 \leqslant r - l + 1$, то гарантовано у грі виграє другий гравець.

Доведення.

Доведемо це твердження методом математичної індукції за довжиною відрізка $[l, r]$.

База індукції. Розглянемо випадок, коли $2 \leqslant r - l + 1 \leqslant 3$. У цьому випадку всі цифри на відрізку $s[l..r]$ однакові (тобто $s_l = s_{l+1}$), а отже, другий гравець завжди перемагає.

Індуктивний перехід. Припустимо, що твердження справедливе для всіх відрізків довжини менше ніж $r - l + 1$. Доведемо його для відрізка $[l, r]$, де $\mathrm{cnt}(l, r) \cdot 2 \leqslant r - l + 1$.

Розглянемо величину

$$d = r - l + 1 - 2 \cdot \mathrm{cnt}(l, r).$$

Тепер обмежимо гру лише цим відрізком і припустимо, що перший гравець може робити ходи поза відрізком, але це не вплине на нашу стратегію.

Як змінюється d за один хід?

- Довжина $r - l + 1$ може зменшитися на 1 (або не змінитися, якщо хід зроблено поза відрізком).
- $\mathrm{cnt}(l, r)$ або залишається незмінною, або зменшується на 1 (якщо видалено цифру, яка зустрічалася лише раз).

Отже, d у найгіршому випадку зменшується на 1 за хід.

Тепер розглянемо три випадки залежно від значення d **після ходу першого гравця**:

1. $d \geqslant 1$**.** Після будь-якого ходу другого гравця $d \geqslant 0$;
2. $d = -1$**.** У цьому випадку на відрізку обов'язково існує цифра, яка зустрічається рівно один раз (інакше $d \geqslant 0$). Другий гравець може видалити цю цифру, і d стане рівним 0;
3. $d = 0$**.** Якщо є цифра, яка зустрічається лише раз, другий гравець також видалить її і перейде до виграшного стану. Інакше усі цифри зустрічаються рівно 2 рази. Тоді розглянемо підвідрізок $[l + 1, r]$. На цьому підвідрізку величина d дорівнює -1, і обов'язково існує цифра, що зустрічається один раз. Другий гравець видаляє її та переходить у виграшний стан.

В усіх випадках кількість цифр на відрізку зменшується, а припущення індукції дозволяє завершити гру на користь другого гравця. □

Рядок складається лише з цифр, тому $\mathrm{cnt}(l, r) \leqslant 10$. Тоді, якщо $|s| \geqslant 20$, то з нашого твердження маємо, що гарантовано виграє другий. Тепер треба визначити, хто виграє для $|s| < 20$.

Для коротших рядків ($|s| < 20$) можна скористатися рекурсією з мемоізацією:

- Кожен стан гри описується бітовою маскою $mask$, де $mask_i = 1$, якщо i-ту цифру ще не видалено, і $mask_i = 0$, якщо видалено;
- Усього можливих станів — $2^{|s|}$;
- Для кожного стану перебираємо можливі ходи і рекурсивно визначаємо переможця.

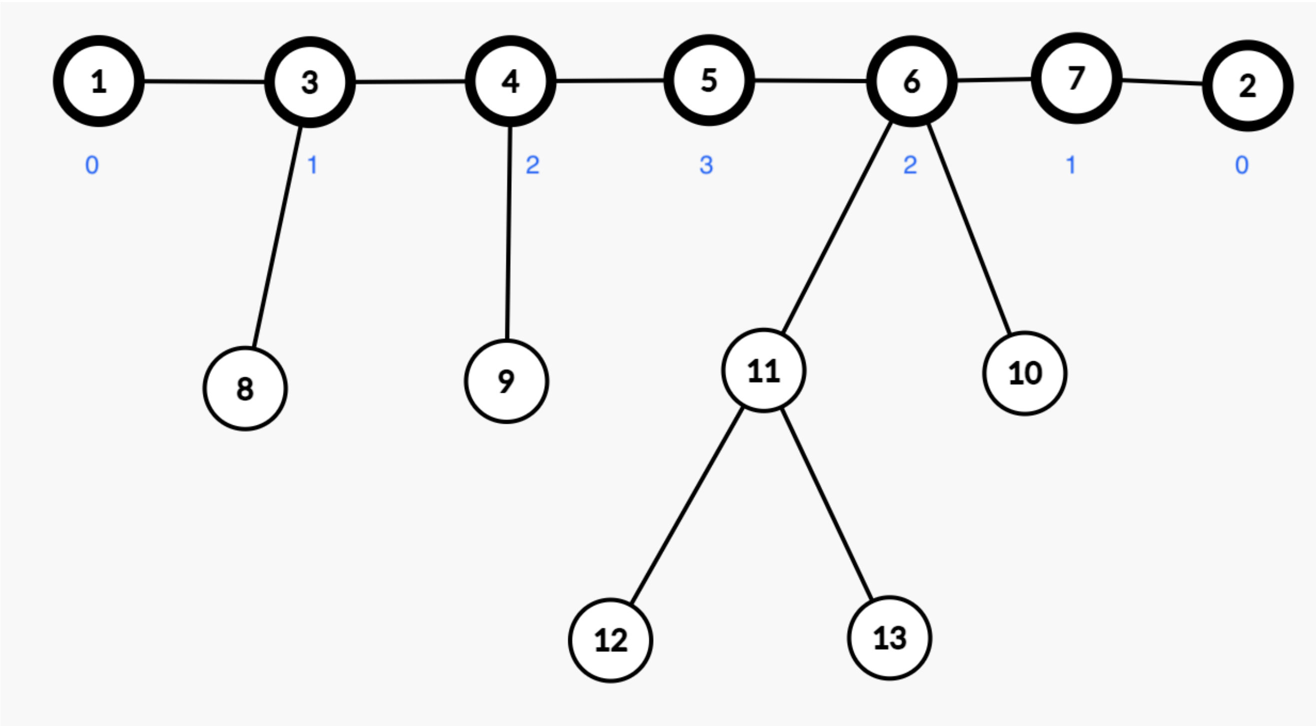
Складність алгоритму $O(2^{|s|} \cdot |s|)$.

Задача E. OldPost — NewPost

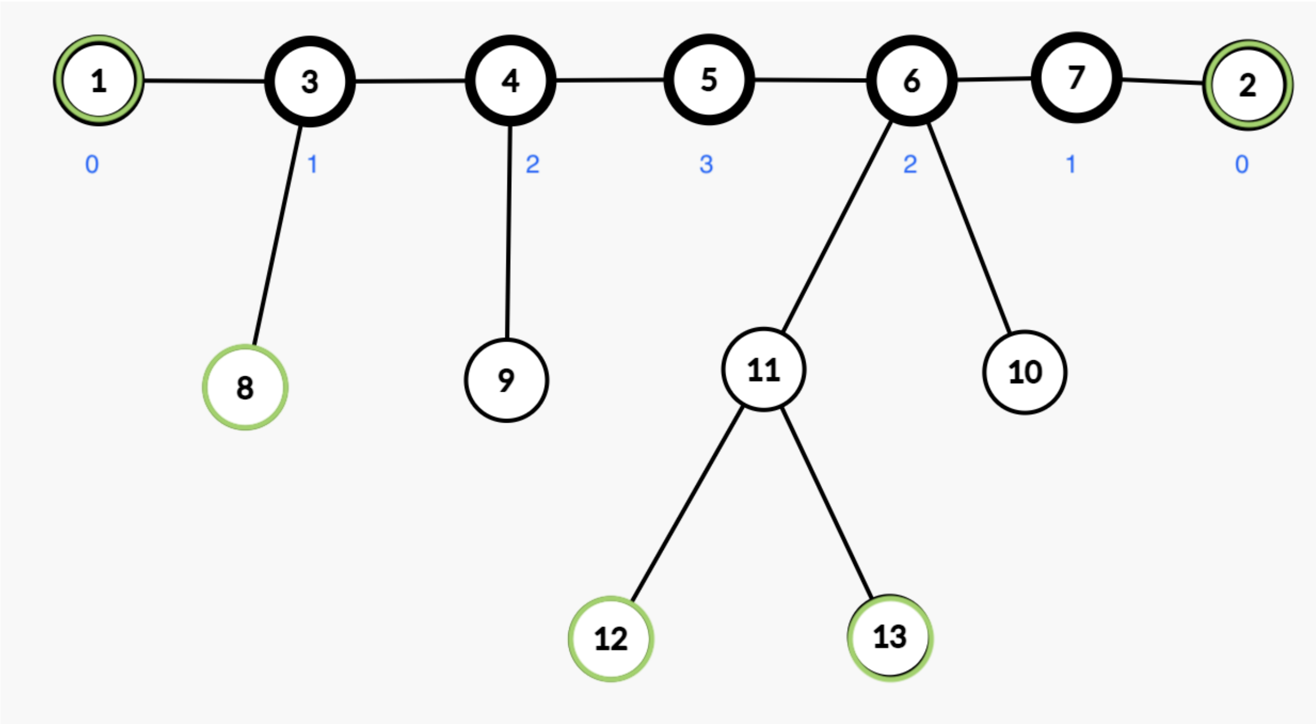
Автор задачі: **Костянтин Денисов**
Задачу підготував: **Данило Квіт**
Розбір написав: **Костянтин Денисов**

Формально кажучи, в задачі треба було знайти два діаметри на дереві, що перетинаються по найменшій кількості вершин.

Розберемося, як можна просто працювати з діаметрами на дереві. Не порушуючи загальності, припустимо, що шлях між вершинами 1 та 2 — діаметр. Зобразимо наше дерево так, ніби воно "підвішене"за цей шлях. Як тоді можна представити інші діаметри?



Для кожної вершини v діаметра подивимось на піддерева сусідніх вершин, що не належать діаметру. Випишемо, яка максимальна можлива відстань від вершини v до вершин в цих піддеревах. Якщо v_1, v_2, $\ldots$, v_l — вершини діаметра в порядку обходу, то максимальна відстань в цих піддеревах для вершини v_i буде $\min(i-1, n-i)$. Позначимо зеленим вершини в піддеревах, на яких відповідний максимум досягається.



Твердження 1. Розділимо наші вершини на три частини (у випадку діаметра парної довжини на дві частини). Групи:

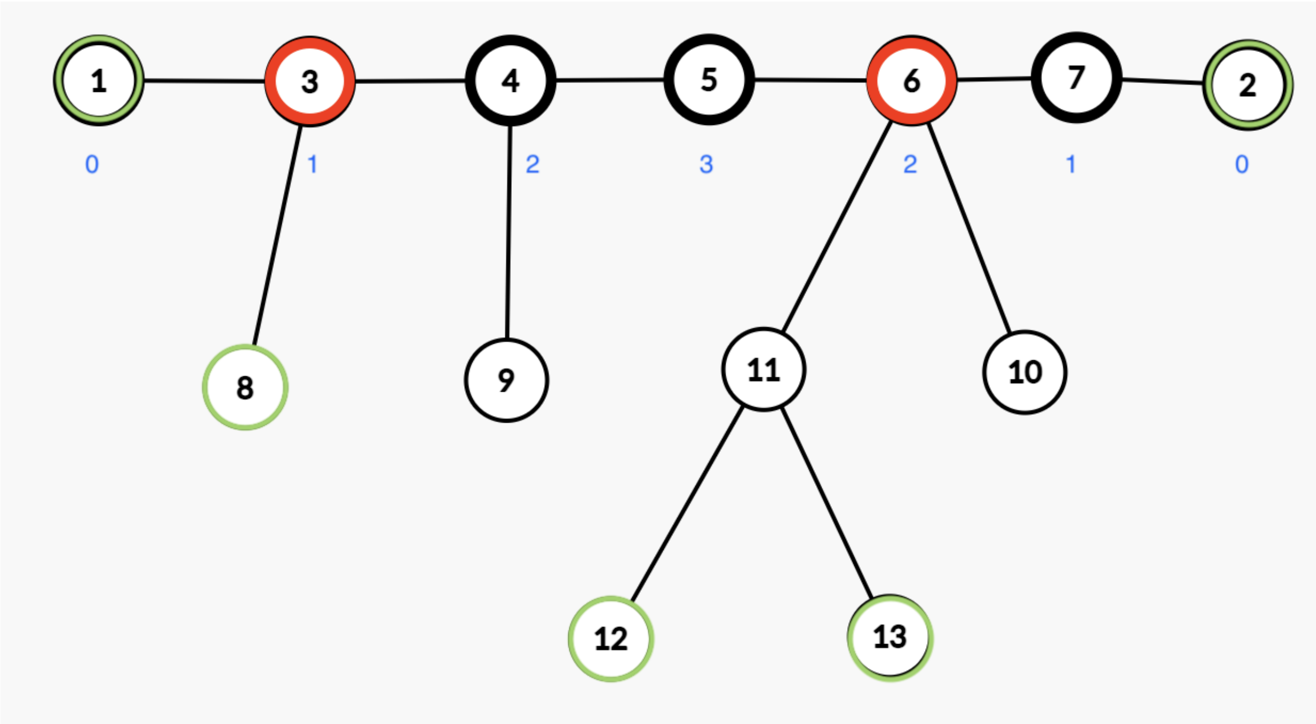
1. Вершини, що знаходяться у піддеревах вершин $v_1, v_2, \ldots, v_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}$;
2. Вершини, що знаходяться у піддеревах вершин $v_{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor + 1}, v_{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor + 2}, \ldots, v_l$;
3. Вершини, що знаходяться у піддеревах вершини $v_{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}$ (лише у випадку непарного l).

Для будь-якого діаметра (нехай a та b його кінцеві вершини) виконуються наступні твердження:

- a, b — зелені вершини;
- хоча б одне з наступних тверджень:
  - a — у першій групі, b — у другій групі (або навпаки);
  - a — у першій або другій групі, b — у третій (або навпаки);
  - a, b — у третій групі, але у різних піддеревах відносно вершини $v_{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}$;

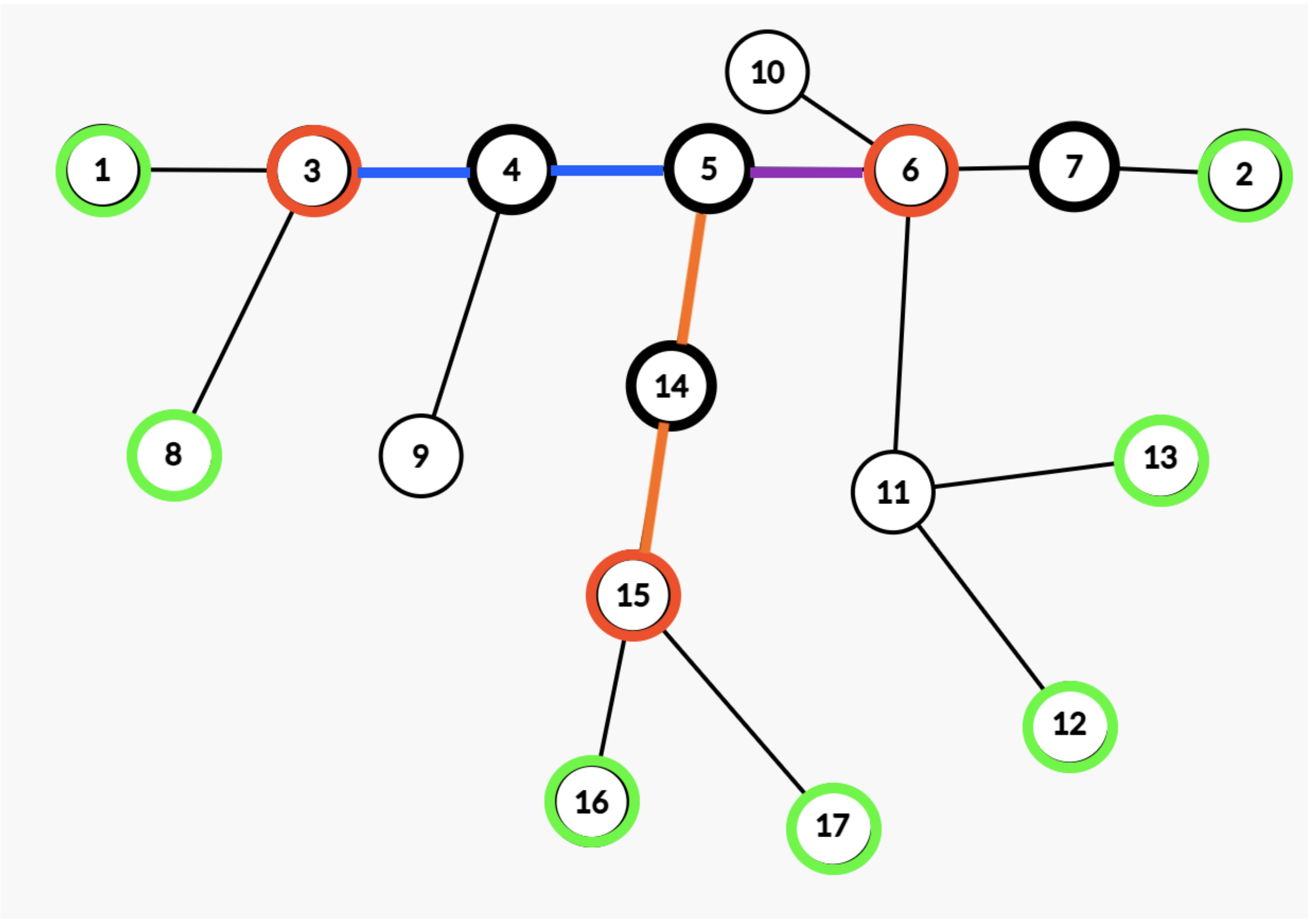
Твердження 2. Якщо є дві зелені вершини a, b третьої групи, що знаходяться в різних піддеревах відносно вершини $v_{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}$, то можна зробити перетин діаметрів рівний 1, взявши діаметри 1 — 2 та a — b.

Твердження 3. Нехай немає зелених вершин третьої групи. Для вершин першої групи знайдемо вершину **діаметра** v_{right} першої групи, що в її піддереві є зелена вершина a, та v_{right} якомога ближче до середини діаметра. Аналогічно треба знайти вершину діаметра v_{left} другої групи, що в її піддереві є зелена вершина b та v_{left} якомога ближче до середини діаметра. Тоді вигідно взяти такі діаметри 1 — 2 та a — b, бо в цьому випадку діаметри завжди будуть перетинатися по вершинах $v_{right}, v_{right+1}, \ldots, v_{left}$.



На малюнку червоним зображено вершини v_{right} та v_{left}.

Твердження 4. Нехай є зелена вершина a третьої групи й немає таких двох вершин з твердження 2. Тоді всі такі зелені вершини третьої групи розташовані в одному піддереві відносно вершини $v_{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}$. У цьому випадку нам, крім знаходження v_{right} та v_{left}, треба знайти v_{down}, вершину, що в її піддереві є дві зелені вершини в різних піддеревах відносно неї (або $v_{down} = a$, якщо такої не існує), що якомога ближче до вершини $v_{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}$.



На малюнку червоним зображено вершини v_{right}, v_{down} та v_{left}. В цьому випадку ми не можемо зробити перетин краще ніж

$$\min(d(v_{right}, v_{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}), d(v_{left}, v_{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}), d(v_{down}, v_{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor})),$$

де $d(u, v)$ — кількість вершин на шляху між вершинами u та v.

Наприклад, якщо взяти діаметри $1 - 2$ та $2 - a$, то перетин буде

$$v_{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}, v_{\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor + 1}, \ldots, v_{left}.$$

Тоді розв'язання задачі має наступний вигляд:

1. Знаходимо будь-який діаметр. Це можна зробити загальновідомим алгоритмом з двома dfs-ами просто знайшов найдальшу вершину v від вершини 1, а потім аналогічно знайти найдальшу вершину u від v. Можна показати, що $v - u$ — діаметр;
2. Розглядаємо випадки в залежності в яке твердження попадаємо.

Складність алгоритму $O(n)$.